МУНИЦИПАЛЬНОЕ АВТОНОМНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «СРЕДНЯЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ШКОЛА № 7 ИМЕНИ ПИЧУЕВА ЛЕОНИДА ПАВЛОВИЧА»

РАССМОТРЕНА
на методическом совете МАОУ «СОШ № 7 имени Пичуева Л.П.»
протокол № 01 от 14.10.2024 г.

УТВЕРЖДЕНА
приказом МАОУ «СОШ № 7 имени Пичуева Л.П.» от 15.10.2024 г. № 382 «Об утверждении педагогической разработки»
Директор МАОУ «СОШ № 7
имени Пичуева Л.П.»
_____________________ / Ю.П. Булдакова

«МЕХАНИКА»

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ (УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ)

10 КЛАСС

Разработчик:
Мамшанова Ирина Михайловна, учитель физики МАОУ «СОШ № 7 имени Пичуева Л.П.», высшая квалификационная категория

2024 г.

СБОРНИК ЗАДАЧ ДЛЯ УГЛУБЛЕННОГО ИЗУЧЕНИЯ ФИЗИКИ (10 КЛАСС) ПО ТЕМЕ «МЕХАНИКА»

Введение

Данный сборник направлен на формирование умений и навыков решения задач по физике повышенной сложности в 10 классе (углубленный уровень).

Изучение курса физики углублённого уровня позволяет реализовать задачи профессиональной ориентации, направлено на создание условий для проявления своих интеллектуальных и творческих способностей каждым обучающимся, которые необходимы для продолжения образования в организациях профессионального образования по различным физико-техническим и инженерным специальностям. В программе по физике определяются планируемые результаты освоения курса физики на уровне среднего общего образования: личностные, метапредметные, предметные (на углублённом уровне). Научно-методологической основой для разработки требований к личностным, метапредметным и предметным результатам обучающихся, освоивших программу по физике на уровне среднего общего образования на углублённом уровне, является системно-деятельностный подход.

Физика как наука о наиболее общих законах природы, выступая в качестве учебного предмета в школе, вносит существенный вклад в систему знаний об окружающем мире. Школьный курс физики – системообразующий для естественно-научных учебных предметов, поскольку физические законы лежат в основе процессов и явлений, изучаемых химией, биологией, физической географией и астрономией. Использование и активное применение физических знаний определило характер и бурное развитие разнообразных технологий в сфере энергетики, транспорта, освоения космоса, получения новых материалов с заданными свойствами. Изучение физики вносит основной вклад в формирование естественно-научной картины мира обучающегося, в формирование умений применять научный метод познания при выполнении ими учебных исследований.

Основными целями изучения физики в общем образовании являются: формирование интереса и стремления обучающихся к научному изучению природы, развитие их интеллектуальных и творческих способностей;

развитие представлений о научном методе познания и формирование исследовательского отношения к окружающим явлениям;

формирование научного мировоззрения как результата изучения основ строения материи и фундаментальных законов физики;

формирование умений объяснять явления с использованием физических знаний и научных доказательств;

формирование представлений о роли физики для развития других естественных наук, техники и технологий;

развитие представлений о возможных сферах будущей профессиональной деятельности, связанных с физикой, подготовка к дальнейшему обучению в этом направлении.

Достижение этих целей обеспечивается решением следующих задач в процессе изучения курса физики на уровне среднего общего образования: приобретение системы знаний об общих физических закономерностях, законах, теориях, включая механику, молекулярную физику, электродинамику, квантовую физику и элементы астрофизики:

формирование умений применять теоретические знания для объяснения физических явлений в природе и для принятия практических решений в повседневной жизни;

освоение способов решения различных задач с явно заданной физической моделью, задач, подразумевающих самостоятельное создание физической модели, адекватной условиям задачи, в том числе задач инженерного характера;

понимание физических основ и принципов действия технических устройств и технологических процессов, их влияния на окружающую среду;

овладение методами самостоятельного планирования и проведения физических экспериментов, анализа и интерпретации информации, определения достоверности полученного результата;

создание условий для развития умений проектно-исследовательской, творческой деятельности; развитие интереса к сферам профессиональной деятельности, связанной с физикой.

МЕХАНИКА

Тема 1. Кинематика и динамика

Представленные задачи позволяют закрепить на практике следующий теоретический материал.

Относительность механического движения. Система отсчёта. Радиус-вектор материальной точки, его проекции на оси системы координат. Траектория. Перемещение, скорость (средняя скорость, мгновенная скорость) и ускорение материальной точки, их проекции на оси системы координат. Сложение перемещений и сложение скоростей. Равномерное и равноускоренное прямолинейное движение. Зависимость координат, скорости, ускорения и пути материальной точки от времени.

Свободное падение. Ускорение свободного падения. Движение тела, брошенного под углом к горизонту. Криволинейное движение. Движение материальной точки по окружности. Угловая и линейная скорость. Период и частота обращения. Центростремительное (нормальное), касательное (тангенциальное) и полное ускорение материальной точки.

Сила тяжести. Сила упругости. Закон Гука. Вес тела. Вес тела, движущегося с ускорением. Сила трения. Сухое трение. Сила трения скольжения и сила трения покоя. Коэффициент трения. Технические устройства и технологические процессы: подшипники, движение искусственных спутников. Законы сохранения. Законы Ньютона.

Задача №1

Первая задача, которую мы рассмотрим, будет посвящена равномерному движению вдоль одной оси. Эта задача будет связана с относительностью движения тел.

Условие:

Из точки A в точку B и обратно движется вертолет. В первый раз из точки A в точку B и обратно он летит в безветренную погоду. А второй раз он летит уже при ветре, направление которого совпадает с направлением первоначального движения, то есть из точки A в точку B. В каком случае – в первом, когда безветренная погода, или во втором случае, когда есть ветер – вертолет затратит больше времени на преодоление этого расстояния?

Решение:

Обозначим скорость вертолета как V_1, а скорость ветра – V_2. А расстояние из точки A до точки B обозначим буквой S. В результате нам надо исследовать, во сколько раз время t_2 будет больше, чем время t_1. То есть найти отношение $\frac{t_2}{t_1}$.

Чтобы найти время t_1, то есть время, за которое вертолет летит из точки A в точку B и обратно в безветренную погоду, мы запишем следующее выражение:

$$t_1 = t_1' + t_1''$$

t_1' – это время полета из точки A в точку B, а t_1'' – время полета из точки B в точку A, когда вертолет летит обратно.

Учитывая, что движение равномерное, можно записать:

$$t_1 = \frac{S}{V_1} + \frac{S}{V_1} = \frac{2S}{V_1}$$

Рассмотрим теперь второй случай. Запишем выражение для времени полета t_2 из точки A в точку B и обратно при наличии ветра:

$$t_2 = t_2' + t_2''$$

t_2' – это время полета из точки A в точку B при условии, что ветер дует по направлению движения вертолета. t_2'' – это время полета при условии, что ветер дует против направления движения вертолета.

Обратите внимание, что время t_2' определяется как $\frac{S}{V_1+V_2}$, поскольку скорости направлены в одну сторону. А t_2'' определяете как $\frac{S}{V_1-V_2}$. То есть ветер тормозит движение вертолета, замедляет его движение, поэтому в данном случае мы берем разность скоростей (рис. 1).

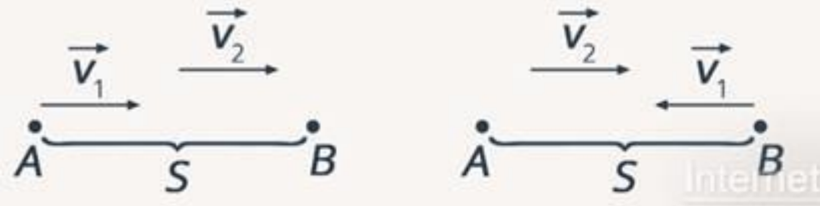


Рис. 1. Направление скоростей вертолета и ветра

Обратите внимание на то, что если бы скорость ветра была больше скорости вертолета, то время получилось бы отрицательным, а это значит, что вертолет обратно бы никогда не прилетел.

Сложим полученные выражения:

$$t_2 = t_2' + t_2'' = \frac{S}{V_1+V_2} + \frac{S}{V_1-V_2} = \frac{S\cdot(V_1-V_2)+S\cdot(V_1+V_2)}{(V_1+V_2)\cdot(V_1-V_2)}$$
$$= \frac{S\cdot V_1 - S\cdot V_2 + S\cdot V_1 + S\cdot V_2}{V_1^2-V_2^2} = \frac{2S\cdot V_1}{V_1^2-V_2^2}$$

Найдем отношение t_1 к t_2:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{2S\cdot V_1\cdot V_1}{(V_1^2-V_2^2)\cdot 2S} = \frac{V_1^2}{V_1^2-V_2^2}$$

Видно, что числитель больше, чем знаменатель, значит, отношение будет больше единицы $\frac{t_1}{t_2} > 1$. Следовательно, можно говорить о том, что время полета в первом случае меньше времени полета во втором случае. Так что при наличии ветра вертолет будет в любом случае двигаться медленнее и затратит большее количество времени.

Также эту задачу можно было решить другим способом, с помощью вычисления средней скорости.

Ответ: $t_1 < t_2$.

Задача №2

Вторая задача связана с равнопеременным движением вдоль прямой. То есть движение будет с постоянным ускорением.

Условие:

Материальная точка движется вдоль прямой согласно уравнению $x = t - 0{,}2t^2$. Определите пройденный путь S этой точкой за $t = 4$ секунды.

Решение:

Сравним уравнение Галилея $x = x_0 + V_0\cdot t + \frac{a\cdot t^2}{2}$ с уравнением движения данной материальной точки.

Рассматривая эти два уравнения, можно сделать вывод, что $x_0 = 0$. Точка начинает свое движение из начала координат. Начальная скорость – это величина, которая стоит перед буквой t. В нашем случае начальная скорость будет равна $V_0 = 1(\frac{м}{с})$. Обратите внимание, что эта скорость положительна и, следовательно, тело начинает движение вдоль оси Ox в том же самом направлении, что и сама ось Ox.

Рассматривая ускорение, мы можем записать следующее: $\frac{a}{2} = -0,2$. Это означает, что ускорение равно $a = -0,4\ \frac{м}{с^2}$. В данном случае знак минус говорит о том, что ускорение направлено против оси Ox. Движение является замедленным (рис. 2).

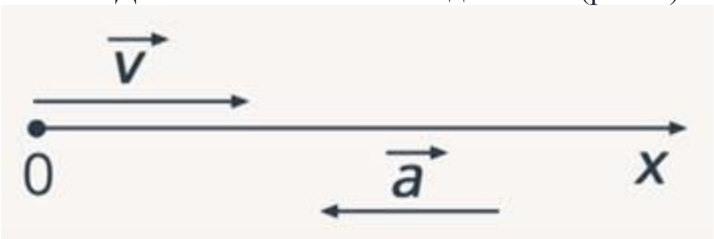


Рис. 2. Направление скорости и ускорения материальной точки

Также мы можем записать уравнение скорости $V = V_0 + a \cdot t = 1 - 0,4 \cdot t$.
Для определения пройденного пути необходимо исследовать траекторию движения.
Итак, для того чтобы исследовать траекторию движения тела, нужно определить, в какой же точке произойдет остановка тела, то есть скорость тела будет равна нулю. Для этого в уравнение скорости подставим конечную скорость, равную нулю, и получим время t_1.

$0 = 1 - 0,4 \cdot t_1$

$t_1 = 2,5\ c$

То есть это означает, что тело через 2,5 секунды остановится. Определим координату точки, в которой тело остановится:

$x_{2,5} = 2,5 - 0,2 \cdot 2,5^2 = 1,25$ м

То есть, пройдя расстояние 1,25 метра, тело остановилось.
Следующий шаг, который мы должны сделать для исследования траектории, это определить конечную координату, то есть координату тела по истечении 4 секунд движения.

$x_4 = 4 - 0,2 \cdot 4^2 = 0,8$ м

То есть координата точки в конце движения составит $0,8$ м.
Обратите внимание на то, что если бы мы сразу определили конечную координату, то, следуя формуле, мы должны были бы сказать, что тело прошло 0,8 метра, хотя это совсем не так. Ведь S – это проекция перемещения. Она совпадает с пройденным путем только в том случае, если направление скорости не изменяется, а в нашей задаче направление скорости через 2,5 секунды меняется на противоположное.
Итак, траектория движения тела является ломаной линией. Тело первые $2,5$ секунды двигалось в одну сторону, затем оно остановилось и при сохранении ускорения начало движение в противоположную сторону (рис. 3).

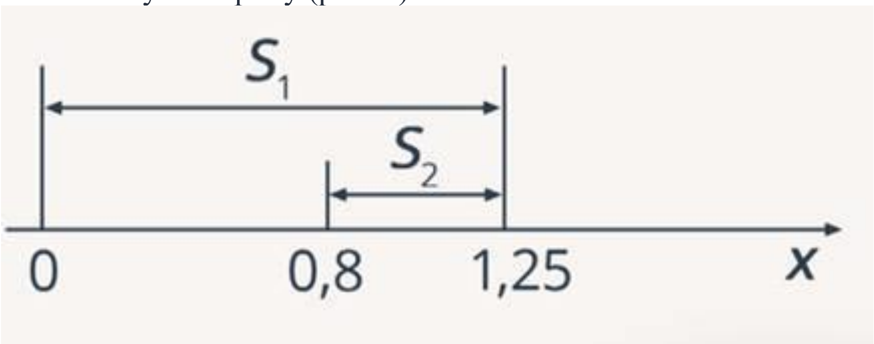


Рис. 3. Пройденный путь материальной точки

Пройденный путь определяется:

$S = 1,25 + (1,25 - 0,8) = 1,7$(м)

Ответ: $1,7$ м.

Задача №3

Третья задача посвящена равномерному движению по окружности, то есть движению по окружности с постоянной скоростью.

Условие:

Имеется вращающийся с постоянной скоростью диск некоторого радиуса. При этом крайние точки этого диска обладают линейной скоростью $V_1 = 3\frac{м}{с}$. А точки, которые располагаются на $x = 10 \text{ см} = 0{,}1 \text{ м}$ ближе к центру вращения, обладают скоростью $V_2 = 2\frac{м}{с}$. Необходимо определить центростремительное ускорение крайних точек этого диска (рис. 4).

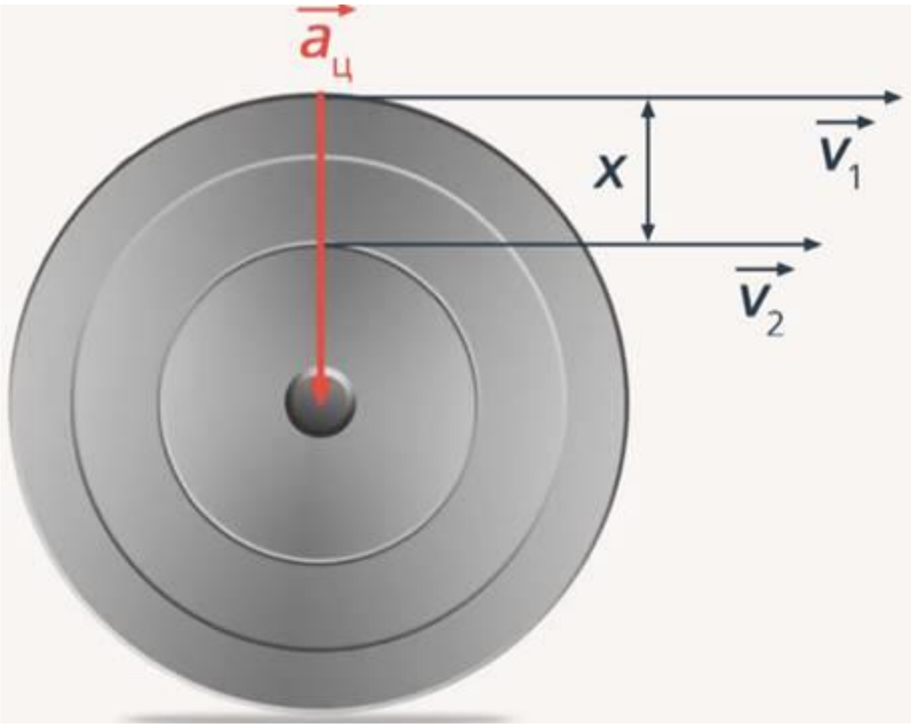


Рис. 4. Иллюстрация к задаче № 3

Решение:

Угловая скорость всех точек на этом вращающемся теле будет одинакова, поэтому для крайних точек мы записываем уравнение:

$V_1 = \omega \cdot R_1$

Аналогично для точек, которые смещены к центру, можно записать:

$V_2 = \omega \cdot R_2$

Разница радиусов равна:

$R_1 - R_2 = x$

Отсюда можно выразить R_2:

$R_2 = R_1 - x$

Исходя из того, что угловая скорость одинакова для всех точек, можно записать:

$$\frac{V_1}{R_1} = \frac{V_2}{R_1 - x}$$

Решая это уравнение, мы можем найти радиус траектории крайних точек:

$$R_1 = \frac{V_1 \cdot x}{V_1 - V_2} = 0{,}3 \text{ м}$$

А для определения центростремительного ускорения достаточно использовать формулу:

$$a_{ц} = \frac{V_1^2}{R_1} = 30\frac{м}{с^2}$$

Ответ: $30\frac{м}{с^2}$.

Ускорение получилось достаточно большим. Вообще при движении тел по окружности центростремительное ускорение бывает очень большим. Например, колесо автомобиля на средней скорости имеет центростремительное ускорение более $500\frac{м}{с^2}$.

Задача 4. Пловец переплывает реку шириной 50 м, направляясь перпендикулярно берегу и не обращая внимания на течение реки. Найдите перемещение пловца относительно земли, если скорость течения равна 0,3 м/с, а скорость пловца относительно воды — 0,5 м/с.

Анализ условия. В задаче описано движение пловца в воде, которая сама движется относительно земли. Будем применять закон сложения скоростей. Запишем его для нашей задачи:

$$\vec{v}_{\text{пл.отн. земли}} = \vec{v}_{\text{пл. отн. воды}} + \vec{v}_{\text{воды}}.$$

Движение пловца и течение реки будем считать равномерным, ничего другого не сказано. Поэтому описывать его будем уравнением:

$$\vec{s} = \vec{v}t.$$

Физическая часть решения задачи. Начертим рисунок. Пловец плывёт, не учитывая течение, то есть его скорость относительно воды направлена перпендикулярно берегу, отметим на рисунке. Скорость течения реки направлена вдоль берега. Скорость пловца относительно земли мы уже записали, это сумма векторов скоростей, найдём её по правилу параллелограмма (рис. 5).

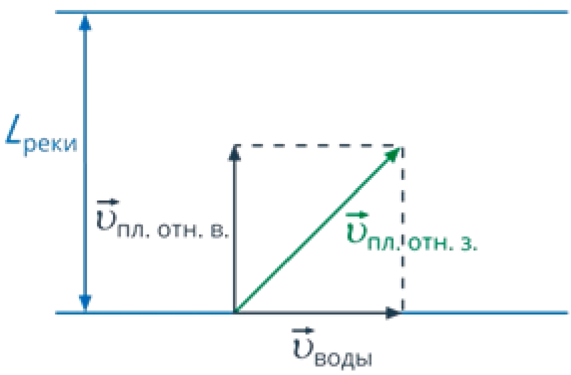


Рис. 5. Результирующая скорость пловца

В задаче идёт речь о перемещениях. Найдём перемещение пловца относительно земли, запишем это выражение сразу без векторов, нам сейчас нужно связать численные значения:

$$S = v_{\text{пл. отн. земли}}t.$$

А перемещение пловца в системе отсчёта, связанной с водой — это ширина реки:

$$L_{\text{реки}} = v_{\text{пл. отн. воды}}t.$$

Время в обоих уравнениях — это одно и то же время, на протяжении которого пловец плыл.

Физическая часть на этом закончилась, мы описали движение с помощью уравнений, и перед тем, как начать их решать, запишем ещё одно, для модуля скорости $\vec{v}_{\text{пл. отн. земли}}$. Так как векторы образуют прямоугольный треугольник, можем применить теорему Пифагора:

$$v_{\text{пл. отн. земли}} = \sqrt{v^2_{\text{пл. отн. воды}} + v^2_{\text{воды}}}.$$

Решим полученную систему уравнений в ответвлении

Математическая часть решения задачи 4

Получили систему уравнений.

$$\begin{cases} v_{\text{пл. отн. земли}} = \sqrt{v^2_{\text{пл. отн. воды}} + v^2_{\text{воды}}} \\ S = v_{\text{пл. отн. земли}} t \\ L_{\text{реки}} = v_{\text{пл. отн. воды}} t \end{cases}$$

Выразим из третьего уравнения время *t*:

$$t = \frac{L_{\text{реки}}}{v_{\text{пл. отн. воды}}}.$$

Подставим полученное время и скорость из первого уравнения во второе:

$$S = \frac{L_{\text{реки}}}{v_{\text{пл. отн. воды}}} \cdot \sqrt{v^2_{\text{пл. отн. воды}} + v^2_{\text{воды}}}.$$

Осталось подставить численные значения, они в условии задачи даны в СИ, и получить ответ:

$$S = \frac{50}{0{,}5} \cdot \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}3^2} = 100 \cdot \sqrt{0{,}34} \approx 58{,}3 \text{ (м)}.$$

Задача 5. Уравнение движения тела задано в виде $x(t) = 9t + 0{,}7t^2$, где все величины заданы в СИ. Определите начальную скорость и ускорение движения тела, а также координату и скорость движения тела через 6 с.

Анализ условия. В задаче представлено равноускоренное движение тела, так как оно по условию задачи описано с помощью квадратичной функции. Равноускоренное движение мы описываем с помощью уравнений:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2},$$
$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t.$$

В условии задачи описано движение вдоль одной оси — *x*, поэтому сразу перепишем уравнения:

$$x(t) = v_{0_x} t + \frac{a_x t^2}{2},$$

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t.$$

Физическая часть решения задачи. Давайте по порядку ответим на вопросы задачи. Начальная скорость тела, как мы видим из уравнения $x(t)$ в общем виде — это множитель при t. В заданном по условию уравнении этот множитель равен 9 м/с (т. к. величины указаны в СИ). Так и запишем: $v_{0x} = 9$ м/с.

Множитель при t^2 равен $\frac{a_x}{2}$, и в заданном уравнении он равен $0{,}7$. Значит,

$$a_x = 2 \cdot 0{,}7 = 1{,}4 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right).$$

Зная начальную скорость и ускорение, можем записать зависимость $v_x(t)$:

$$v_x(t) = 9 + 1{,}4t.$$

У нас есть зависимости $x(t)$ и $v_x(t)$, с помощью которых можно узнать координату и скорость тела в любой момент времени, в том числе и через 6 с после начала движения. Просто подставим в зависимости $t = 6$ с и получим:

$$x(6\text{ с}) = 9 \cdot 6 + 0{,}7 \cdot 6^2 = 79{,}2\ (\text{м}),$$

$$v_x(6\text{ с}) = 9 + 1{,}4 \cdot 6 = 17{,}4 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right).$$

Математическую часть решения выделять отдельно не будем, мы сделали простые вычисления попутно с физической частью.

Ответы получены, задача решена.

Задача 6. С каким промежутком времени оторвались от карниза две капли, если спустя две секунды после начала падения второй капли расстояние между каплями было 25 м? Трением о воздух пренебречь.

Анализ условия. В задаче описано движение капель под действием только силы тяжести, трением воздуха сказано пренебречь. В таких условиях тела движутся с постоянным ускорением — ускорением свободного падения, направленным вниз. Как обычно, будем применять уравнения для равноускоренного движения:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2},$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t.$$

Физическая часть решения задачи. Выберем систему координат. Речь идёт о падении капель вертикально вниз, поэтому можно ограничиться одной осью координат. Направим её в направлении движения капель, а начало координат удобно совместить с карнизом (рис. 6).

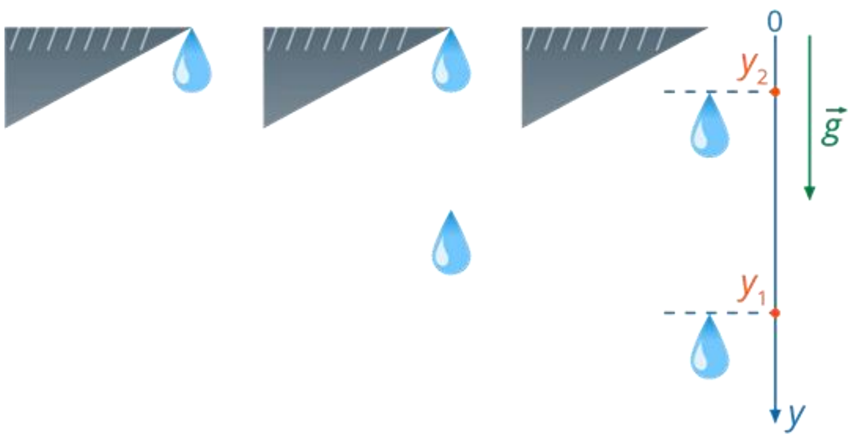


Рис. 6.Система координат для падающих капель

В условии задачи не всё однозначно с отсчётом времени, нужно определиться. Речь идёт о момент времени через 2 с после начала падения второй капли, давайте начало падения второй капли и примем за ноль.

Запишем уравнения движения капель, сразу в проекциях на ось y.

Начнём со второй капли: она оторвалась без начальной скорости из точки $y = 0$, а её ускорение — это ускорение свободного падения, сонаправленное с осью координат. Запишем:

$$y_2(t) = \frac{gt^2}{2}.$$

Первая капля оторвалась в той же точке с нулевой начальной координатой, тоже без начальной скорости, но, так как она оторвалась на какое-то время раньше (обозначим его t', его как раз нужно найти), она находится в полёте на t' дольше, то есть:

$$y_1(t) = \frac{g(t + t')^2}{2}.$$

В момент времени $t = 2$ с расстояние между каплями равно 25 м, обозначим его L. Расстояние между каплями – это разность координат:

$$L = y_1(2) - y_2(2).$$

Полученную систему уравнений можно решить, в ней три уравнения и три неизвестных, так что выражение для скорости нам даже не понадобилось. С математической частью решения задачи вы можете ознакомиться в ответвлении.

Математическая часть решения задачи 6

Запишем полученную систему уравнений.

$$\begin{cases} y_1(t) = \dfrac{g(t + t')^2}{2} \\ y_2(t) = \dfrac{gt^2}{2} \\ L = y_1(2) - y_2(2) \end{cases}$$

Подставим в третье уравнение выражения из первых двух:

$$L = \frac{g(t + t')^2}{2} - \frac{gt^2}{2}.$$

Возведём скобку в квадрат:

$$L = \frac{g(t^2 + 2tt' + t'^2)}{2} - \frac{gt^2}{2} = \frac{gt^2}{2} + gtt' + \frac{gt'^2}{2} - \frac{gt^2}{2} = gtt' + \frac{gt'^2}{2}.$$

Чтобы было удобнее решать уравнение, подставим значения, ускорение свободного падения примем равным $10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$:

$$25 = 10 \cdot 2 \cdot t' + \frac{10 \cdot t'^2}{2}.$$

Разделим обе части на 5:

$$t'^2 + 4t' - 5 = 0.$$

Решения этого уравнения: 1 с и −5 с. Ответ −5 с отбрасываем, потому что, если первая капля оторвалась на –5 секунд раньше — это значит на 5 секунд позже, а это не подходит под нашу модель. Поэтому оставляем ответ: интервал между отрывом капель составил 1 с. Задача решена.

Задача 7. Первый искусственный спутник Земли («Спутник-1») делал полный оборот вокруг Земли за 1 час 36 минут. Найдите радиус его орбиты.

Анализ условия. В задаче описано движение спутника по круговой орбите (а значит движение с центростремительным ускорением) под действием одной силы — силы притяжения к Земле. Будем использовать второй закон Ньютона, а силу гравитационного взаимодействия с Землёй найдём по закону всемирного тяготения. Массу и радиус Земли можно узнать из справочника.

Физическая часть решения задачи. Запишем по второму закону Ньютона, как связана сила, действующая на спутник со стороны Земли, с его ускорением (рис. 3).

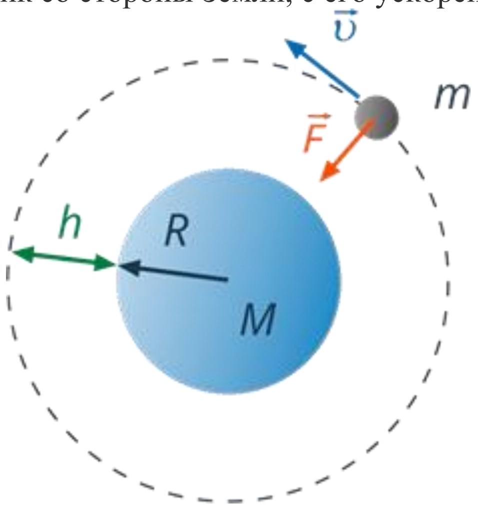


Рис. 7. Движение спутника вокруг Земли

Поскольку сила сонаправлена с ускорением, запишем сразу по модулю:

$$F = ma.$$

Центростремительное ускорение мы умеем находить, оно равно:

$$a = \frac{\upsilon^2}{r}.$$

Сила гравитационного притяжения по закону всемирного тяготения равна:

$$F = G\frac{m \cdot M}{r^2}.$$

где m и M — массы спутника и Земли соответственно.

r — это как раз радиус орбиты, который нам нужно найти, и расстояние между центрами спутника и Земли.

В условии задачи дано время полного оборота спутника вокруг Земли, то есть период вращения. Запишем, как связан период с линейной скорость спутника. Спутник за время T проходит путь, равный длине орбиты, $2\pi r$. Значит, скорость по определению равна:

$$\upsilon = \frac{2\pi r}{T}.$$

Получили систему уравнений, **математическая часть решения** — в ответвлении.

Математическая часть решения задачи 7

Запишем полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} F = ma \\ a = \dfrac{\upsilon^2}{r} \\ F = G\dfrac{m \cdot M}{r^2} \\ \upsilon = \dfrac{2\pi r}{T} \end{cases}$$

Система простая, подставим силу и ускорение из второго и третьего уравнений в первое:

$$G\frac{m \cdot M}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Выразим скорость спутника:

$$G\frac{M}{r} = v^2,$$

$$v = \sqrt{G\frac{M}{r}}.$$

Подставим скорость в четвёртое уравнение.

$$\sqrt{G\frac{M}{r}} = \frac{2\pi r}{T}$$

$$G\frac{M}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

$$r^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

Вычислим значение радиуса орбиты, переведя 1 час 36 минус в секунды. Это 60 + 36 минут или $T = (60 + 36) \cdot 60 = 5760$ с.

$$r = \sqrt[3]{\frac{6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 5760^2}{4 \cdot 3{,}14^2}} = \sqrt[3]{3{,}3818 \cdot 10^{20}} \approx 6{,}967 \cdot 10^6 \text{ (м)}.$$

Задача решена. Используя округления при подсчётах, получили приблизительно 6967 км, что примерно соответствует реальным данным «Спутник-1», характеристики его движения вы можете найти в открытых источниках и сравнить.

Задача 8. Тело массой m движется по поверхности стола под действием силы $\vec{F}$, направленной под углом α к горизонтали (рис. 4). Коэффициент трения скольжения между телом и поверхностью стола равен μ. Найдите вес тела и его ускорение.

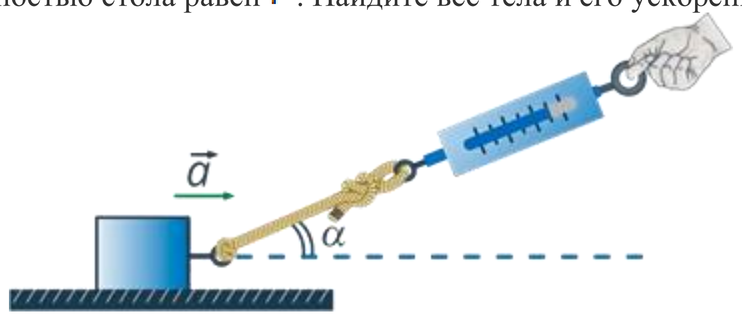


Рис. 8.Задача 8

Анализ условия. В задаче описано прямолинейное движение под действием нескольких сил. По второму закону Ньютона ускорение тела прямо пропорционально равнодействующей сил, действующих на тело.

Физическая часть решения задачи. На тело действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$, в условии задана сила $\vec{F}$, с которой тащат тело, и задан коэффициент трения – это подсказка, что силу трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ тоже учитываем, она по модулю равна:

$$F_{\text{тр}} = \mu N.$$

Изобразим перечисленные силы на рисунке 8.

$|\vec{P}| = |\vec{N}|$

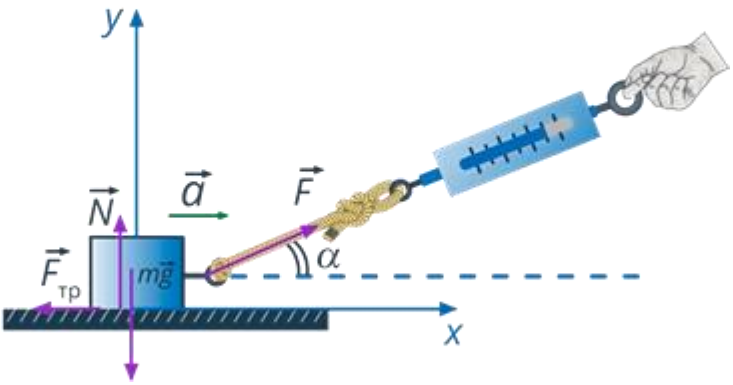


Рис. 9. Силы, действующие на тело (задача 8)

Нужно найти вес тела — это сила, с которой тело действует на опору. По третьему закону Ньютона вес равен по модулю силе реакции опоры, с которой опора действует на тело. Мы описываем движение тела, значит, будем записывать силы, которые действуют на это тело, и поиск веса тела сведём к поиску силы реакции опоры.

Выберем систему координат. Удобно направить ось y вертикально вверх, а ось x — в направлении движения бруска.

Применим второй закон Ньютона:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_{\text{тр}} = m\vec{a}.$$

Запишем в проекциях на выбранные оси координат. Сначала в проекции на ось x. Проекции сил тяжести и реакции опоры равны нулю, силы трения направлена против оси x, её проекция будет со знаком минус:

$$F \cdot \cos\alpha - F_{\text{тр}} = ma.$$

В проекции на ось y:

$$-mg + N + F \cdot \sin\alpha = 0.$$

Тело движется вдоль поверхности, поэтому проекция ускорения равна нулю, как и силы трения.

На записи второго закона Ньютона в проекциях на выбранные оси координат физическая часть закончилась. Осталось решить систему уравнений, **математическая часть решения** в ответвлении.

Математическая часть решения задачи 8

Получили систему уравнений, запишем сразу с силой трения.

$$\begin{cases} F \cdot \cos\alpha - \mu N = ma \\ -mg + N + F \cdot \sin\alpha = 0 \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения силу реакции опоры:

$$N = mg - F \cdot \sin\alpha.$$

Вес по модулю равен силе реакции опоры, поэтому именно его мы только что нашли.

Подставим N в первое уравнение:

$$F \cdot \cos\alpha - \mu(mg - F \cdot \sin\alpha) = ma.$$

Разделим обе части уравнения на m:

$$a = \frac{F \cdot \cos\alpha - \mu(mg - F \cdot \sin\alpha)}{m}.$$

Задача решена.

Задача 9. На наклонную плоскость, угол наклона которой $\alpha = 30°$, с высоты $h = 1$ м свободно падает тело и упруго отлетает с той же скоростью. Определите расстояние от первого удара тела о плоскость до второго.

Анализ условия. В задаче описано движение тела с ускорением свободного падения. Как обычно, будем его описывать теми же уравнениями:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2},$$
$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t.$$

Движение тела сложное, с отскоком от поверхности, но его можно разделить на два простых этапа: это свободное падение вертикально вниз до отскока, и затем движение, тоже с ускорением свободного падения и начальной скоростью v_0 после отскока. Начальная скорость на втором этапе равна по модулю конечной скорости на первом этапе.

Физическая часть решения задачи. Опишем в виде уравнений первый этап движения. Движение прямолинейное, можем обойтись одной осью координат, направим её вертикально вниз, начало координат совместим с начальной точкой тела. В такой системе координат (рис. 6) начальная координата и начальная скорость тела равны нулю, ускорение свободного падения положительно, запишем:

$$y(t) = \frac{gt^2}{2},$$
$$v(t) = gt.$$

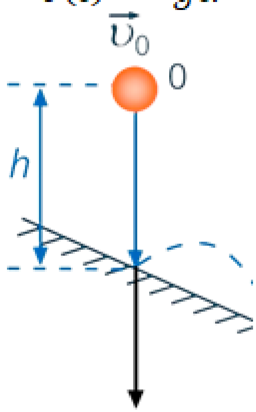


Рис. 10. Падение тела на наклонную плоскость: прямолинейное движение на первом этапе

В тот момент t, когда координата тела $y(t)$ равна h, скорость тела достигнет некоторого значения, которое будет равно v_0 на втором этапе. Давайте выразим эту скорость и сосредоточимся на втором этапе задачи.

$$h = \frac{gt^2}{2} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \rightarrow$$

$$v_0 = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}.$$

Опишем второй этап движения тела.

Выберем новую систему координат. Тело в данной задаче уже не движется вдоль прямой (рис. 7), поэтому выберем две оси координат. Давайте направим ось x параллельно плоскости, нам удобно будет искать расстояние между первым и вторым ударами. Ось y направим перпендикулярно оси x.

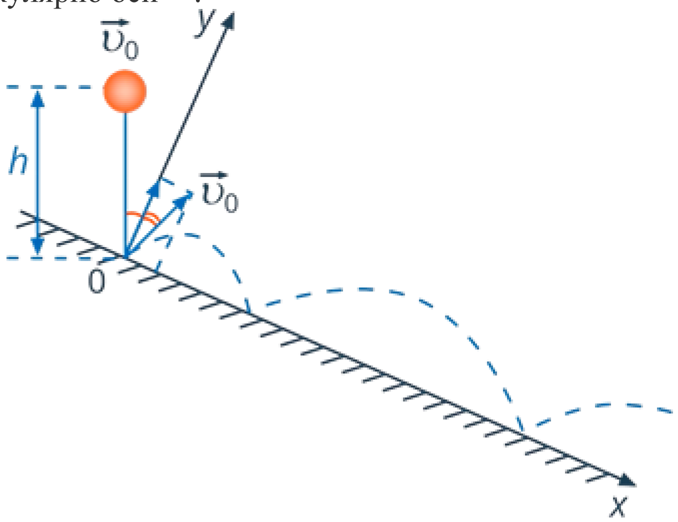


Рис. 11. Движение тела на втором этапе (после отскока от плоскости)

Опыт нам подсказывает, что при упругом столкновении тела с плоскостью тело отражается от неё симметрично, подобно отражению луча от зеркала. Это можно проверить, применив закон сохранения импульса. Значит, если провести к плоскости перпендикуляр (а он совпадает с осью y), то углы между векторами скоростей и нормалью к плоскости будут равны (см. рис. 11).

С системой координат определились, направления начальной скорости и ускорения выяснили. Осталось, как обычно, записать наши главные уравнения для равнопеременного движения в проекциях на оси координат.

В проекции на ось x начальная координата равна нулю, а проекции начальной скорости и ускорения отметим на рисунке 12.

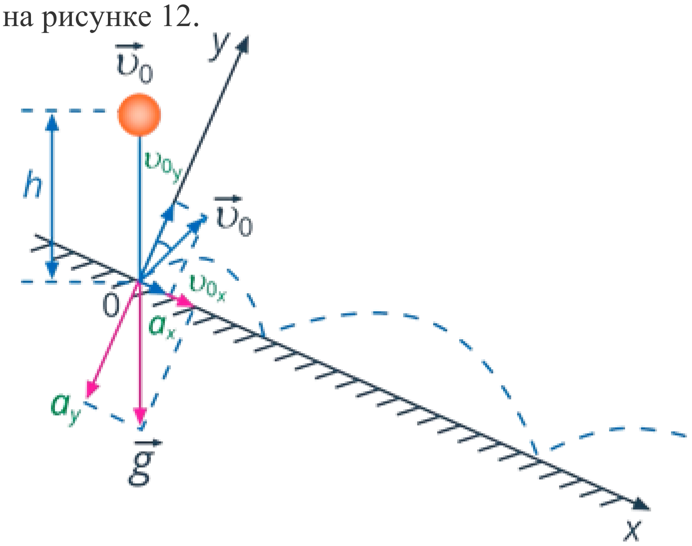


Рис. 12. Ускорение, скорость тела и их проекции на оси координат

$$x(t) = \upsilon_{0_x} t + \frac{a_x t^2}{2},$$
$$\upsilon_x(t) = \upsilon_{0_x} + a_x t.$$

В проекции на ось y начальная координата тоже равна нулю, а проекции начальной скорости и ускорения на эту ось тоже отмечены на рисунке 12.

$$y(t) = {v_0}_y t + \frac{a_y t^2}{2},$$
$$v_y(t) = {v_0}_y + a_y t.$$

Перед тем как решать уравнения, чтобы записать проекции скорости и ускорения, вспомним геометрию. Угол наклона плоскости равен α, отметим его на рис. 13. Горизонт, наклонная плоскость и вектор $\vec{g}$ образуют прямоугольный треугольник, углы со взаимно перпендикулярными сторонами равны, значит, угол между вектором $\vec{g}$ и осью y равен α. Обратите внимание, вот эти углы вертикальные (рис. 13), и при симметричном отражении начальная скорость направлена тоже под углом α к оси y.

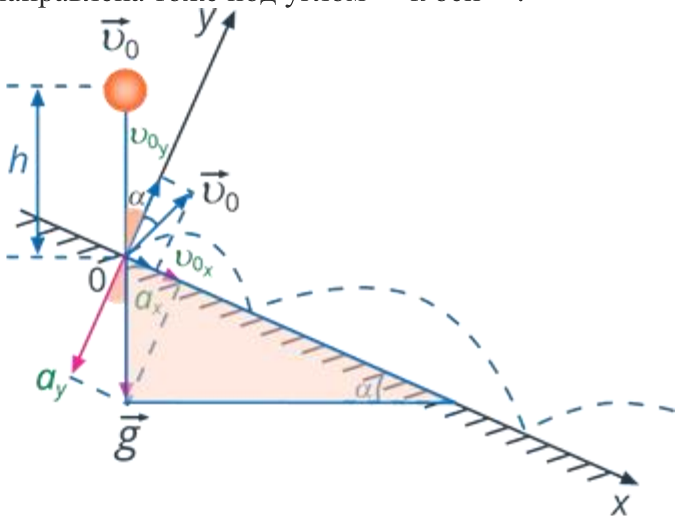


Рис. 13. Выделение одинаковых углов

Теперь легко записать нужные нам проекции:

$${v_0}_x = v_0 \cdot \sin\alpha,$$
$${v_0}_y = v_0 \cdot \cos\alpha,$$
$$a_x = g \cdot \sin\alpha,$$
$$a_y = -g \cdot \cos\alpha.$$

Помним, что v_0 мы уже нашли, $v_0 = \sqrt{2gh}$, поэтому осталось только переписать уравнения и решить систему.

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t + \dfrac{g \cdot \sin\alpha \cdot t^2}{2} \\ v_x(t) = v_0 \cdot \sin\alpha + g \cdot \sin\alpha \cdot t \\ y(t) = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t - \dfrac{g \cdot \cos\alpha \cdot t^2}{2} \\ v_y(t) = v_0 \cdot \cos\alpha - g \cdot \cos\alpha \cdot t \\ v_0 = \sqrt{2gh} \end{cases}$$

На этом физическая часть решения задачи закончилась, из этих уравнений можно математически получить всё, что нам нужно.

Нам нужно найти расстояние вдоль плоскости от начала координат до второго удара (рис. 13), то есть найти координату x в момент удара. В момент удара координата у равна нулю (рисунок), перепишем третье уравнение, для $y(t)$:

$$0 = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t - \frac{g \cdot \cos\alpha \cdot t^2}{2}.$$

Можем разделить обе части уравнения на $\cos\alpha$ и выразить t:

$$0 = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \rightarrow t \cdot \left(v_0 - \frac{gt}{2}\right) = 0.$$

Получили два корня:

$$t_1 = 0,$$
$$t_2 = \frac{2 \cdot v_0}{g}.$$

Первый корень показывает, что в момент времени $t = 0$, то есть в момент первого удара тело действительно соприкасалось с плоскостью, но нас интересует второй такой момент, t_2. Подставим в первое уравнение:

$$x(t) = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{2 \cdot v_0}{g} + \frac{g \cdot \sin\alpha \cdot \left(\frac{2 \cdot v_0}{g}\right)^2}{2} = \frac{2 \cdot \sin\alpha \cdot v_0^2}{g} + \frac{g \cdot \sin\alpha \cdot 4 \cdot v_0^2}{2g^2}$$
$$= \frac{4 \cdot \sin\alpha \cdot v_0^2}{g} = \frac{4 \cdot \sin\alpha \cdot 2gh}{g} = 8h \cdot \sin\alpha.$$

Подставим значения и получим ответ:

$$L = 8 \cdot 1 \cdot \sin 30° = 4 \text{ (м)}.$$

Задача решена.

Обратите внимание, мы решали задачу, как обычно описывая движение с помощью всё тех же двух уравнений. Единственное, что отличалось в данной задаче — пришлось вспомнить геометрию и разобраться с проекциями. Поэтому решение получилось более громоздким, но не более сложным. Можно было решить задачу, направив оси координат, как показано на рисунке (рис. 14).

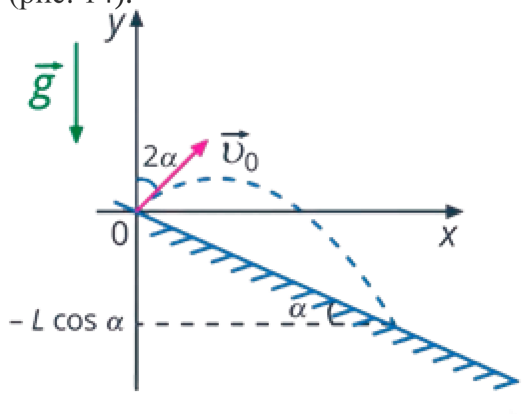


Рис. 14. Движение тела в другой системе координат

Тогда уравнения приняли бы другой вид, а в момент второго удара тела его координата y равнялась бы не нулю, а $-L\cos\alpha$. Попробуйте самостоятельно решить эту задачу в такой системе координат и убедитесь, что ответ получится тот же.

Задача 10. Два тела с массами m_1 и m_2 связаны лёгкой нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижный блок, как показано на рисунке 11. Трением нити о блок и второго тела о поверхность пренебречь. С каким ускорением движутся тела, если угол наклона плоскости равен α?

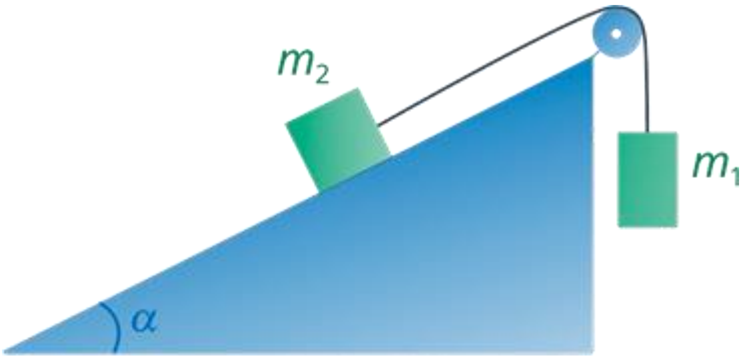


Рис. 15. Задача 10

Анализ условия. В задаче описано движение двух тел под действием нескольких сил. Для каждого тела применим второй закон Ньютона. Для этого распишем все силы, действующие на данное тело, и запишем, что их сумма пропорциональна ускорению тела.

Поскольку тела связаны нерастяжимой нитью, их ускорения равны по модулю. Мы точно не знаем, в какую сторону движутся тела, это будет зависеть от соотношения их масс. Предположим, что перевесит первое тело. Так как нить лёгкая, то есть её массой можно пренебречь, то по третьему закону Ньютона можно считать, что на тела действует одинаковая по модулю сила натяжения нити.

Физическая часть решения задачи. Рассмотрим тело 1. На него действует сила тяжести $m_1\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}_1$ (рис. 16).

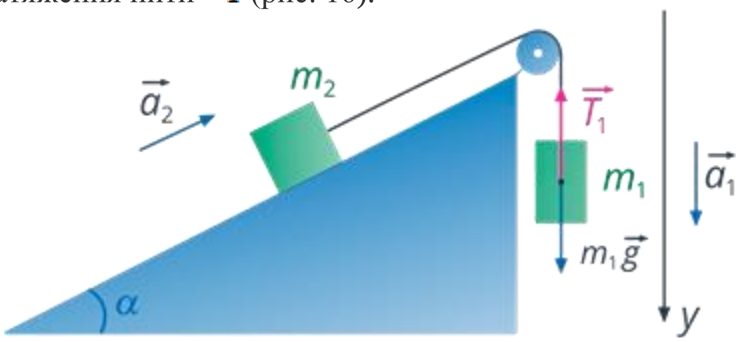


Рис. 16. Силы, действующие на тело 1

Запишем по второму закону Ньютона:

$$m_1\vec{g} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1.$$

Тело движется вдоль одной прямой, достаточно одной оси y, направим её вертикально вниз. В проекции на эту ось запишем:

$$m_1 g - T = m_1 a.$$

T и a без индекса, они по модулю равны для обоих тел.

Перейдём к телу 2. На него действует сила тяжести $m_2\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}_2$ и сила реакции опоры $\vec{N}$, рис. 17.

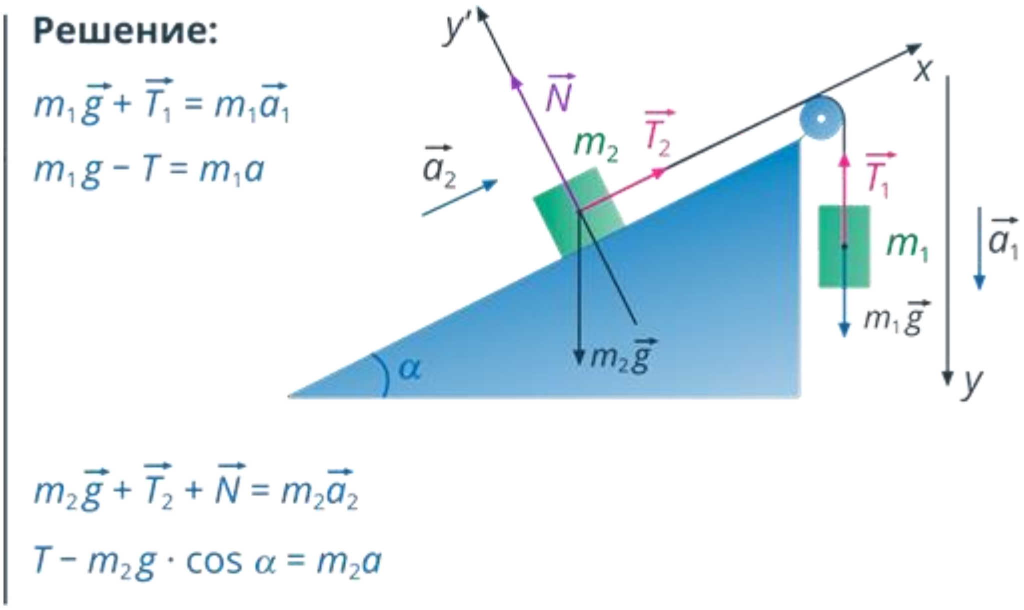


Рис. 17. Силы и система координат для второго тела

Запишем по второму закону Ньютона:

$$m_2\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{N} = m_2\vec{a}_2.$$

Выберем систему координат. Удобно направить ось x вдоль движения тела, а перпендикулярно ей — ось y' (назовём её так, потому что она отличается от оси y, которая у нас уже есть). Запишем в проекции на ось x:

$$T - m_2 g \cdot \cos\alpha = m_2 a.$$

В проекции на ось y':

$$N - m_2 g \cdot \sin\alpha = 0.$$

Проекции силы тяжести мы записали, зная, что угол между осью y' и $\vec{g}$ равен α. Давайте немного отвлечёмся на геометрию и один раз проследим, как мы нашли этот угол, потому что такой чертёж нам будет часто встречаться.

Расположим вектор силы тяжести, как показано на рис. 18.

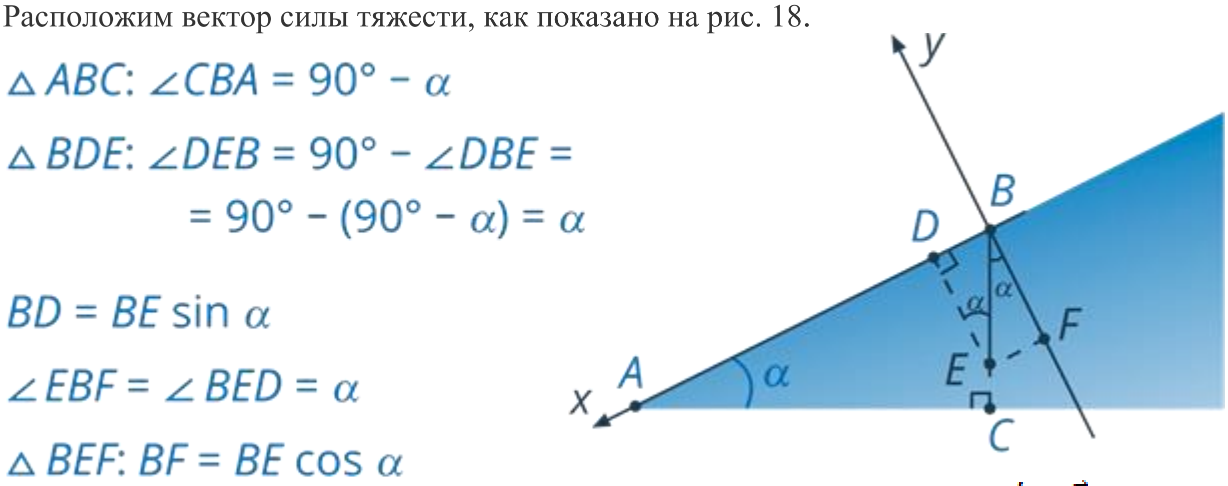


Рис. 18. Геометрические построения для определения угла между осью y' и $\vec{g}$

Если его продолжить, получим прямоугольный треугольник ABC. Угол $CBA = 90° - \alpha$. В треугольнике BDE, тоже прямоугольном, т. к. BD — проекция BE, угол $DEB = 90° - DBE = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$. Тогда $BD = BE\sin\alpha$. В ΔBEF BF – проекция BE. Угол $\angle EBF = \angle BED = \alpha$, т. к. $DE || BF$, BE — секущая. $BF = BE\cos\alpha$. Таким образом, нам нужно, используя знания по геометрии, опре-

делить, где в треугольниках, образованных проекциями, находится заданный угол наклона плоскости α, чтобы правильно применять синус или косинус угла наклона.
Вернёмся к задаче: мы получили систему уравнений, из которой можно найти ускорение. Это будет математическая часть решения, физическая на этом закончилась.
Напишем ещё раз систему уравнений.

$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a \\ T - m_2 g \cdot \cos\alpha = m_2 a \\ N - m_2 g \cdot \sin\alpha = 0 \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения силу натяжения T:

$$T = m_1 g - m_1 a.$$

Подставим её во второе уравнение:

$$m_1 g - m_1 a - m_2 g \cdot \cos\alpha = m_2 a.$$

Как видим, третье уравнение нам даже не пригодилось, мы уже можем выразить ускорение. Перенесём все члены с неизвестным в одну часть уравнения:

$$m_2 a + m_1 a = m_1 g - m_2 g \cdot \cos\alpha \rightarrow$$

$$a(m_1 + m_2) = g(m_1 - m_2 \cos\alpha) \rightarrow$$

$$a = g\frac{m_1 - m_2 \cos\alpha}{m_1 + m_2}.$$

Проанализируем полученный ответ. Мы предположили, что тела движутся в направлении первого тела. Если m_1 больше, чем $m_2 \cos\alpha$, то так и будет, ускорение получится положительным. Если же масса тела 2 будет достаточно большой, а именно $m_2 \cos\alpha > m_1$, то знак ускорения будет отрицательным, то есть оно будет направлено в противоположную сторону.

Тема 2. Статика твёрдого тела

Данный раздел направлен на отработку следующих тем при решении задач разного уровня сложности.

Абсолютно твёрдое тело. Поступательное и вращательное движение твёрдого тела. Момент силы относительно оси вращения. Плечо силы. Сложение сил, приложенных к твёрдому телу. Центр тяжести тела. Условия равновесия твёрдого тела. Федеральная рабочая программа. Устойчивое, неустойчивое, безразличное равновесие. Технические устройства и технологические процессы: кронштейн, строительный кран, решётчатые конструкции.

Задача 1. Момент силы

Условие/ На рычаг в состоянии равновесия действуют две силы. Момент первой равен 20 Н*м. Модуль второй силы равен 5 Н. Найдите плечо второй силы.

Решение

Запишем условие равновесия рычага:

$$M_1 = M_2$$

Отсюда:

$$M_1 = F_2 d_2$$

$$d_2 = \frac{M_1}{F_2} = \frac{20}{5} = 4м$$

Ответ: 4м.

Задача 2. Рычаг

Условие/ На концах рычага действуют силы с модулями 20 и 120 Н соответственно. Рычаг находится в равновесии. Найдите длину рычага, если расстояние от точки опоры до большей силы равно 2 см.

Решение

Запишем равенство моментов:

$$M_1 = M_2 \qquad F_1 d_1 = F_2 d_2$$

$$d_1 = \frac{F_2}{F_1} d_2 = \frac{120}{20} \cdot 2 = 12см$$

$$l = d_1 + d_2 = 12 + 2 = 14см.$$

Ответ: 14 см.

В этой задаче мы не переводили размерности в систему СИ.

Задача 3. Расчет силы

Условие/ Рабочий на стройке поднимает плиту с помощью рычага. Большее плечо равно 2,4м, меньшее - 0,8м. Какую силу прикладывает рабочий к большему плечу рычага, если масса плиты равна 120 кг?

Решение

Обозначим большее плечо через d1. К нему рабочий прикладывает искомую силу F1. Вторая сила, приложенная к меньшему плечу, равна весу плиты.

$$F_2 = P = mg = 1200H$$

$$F_1 d_1 = F_2 d_2$$

$$F_1 = \frac{F_2 d_2}{d_1} = \frac{1200 \cdot 0,8}{2,4} = 400H$$

Ответ: 400 Н.

Задача 4. Подвижный блок

Условие/ Какую силу нужно приложить, чтобы поднять груз весом 1000 Н с помощью подвижного блока? Какую работу совершит эта сила при подъеме груза на 1 метр? Подвижный блок позволяет выиграть в усилии в два раза.

Решение

Найдем силу и работу:

$$F = \frac{P}{2} = \frac{1000}{2} = 500H$$

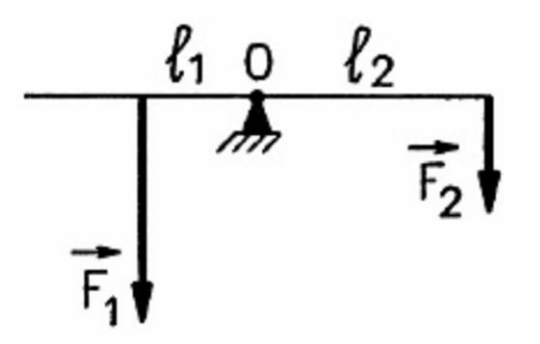
$$A = mgh = 1000 \cdot 1 = 1000\,Дж$$

Ответ: 500 Н, 1000 Дж.

Задача 5. Нахождение плеча рычага

Условие/ На плечи рычага действуют силы 300 Н и 20 Н. Меньшее плечо равно 5см. Найдите большее плечо рычага.

Решение



Условие равновесия рычага можно записать так:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1}$$

$$l_2 = \frac{F_1 l_1}{F_2} = \frac{300 \cdot 5}{20} = 75см$$

Ответ: 75 см.

Задача 6.

Металлический однородный стержень массой 10 кг и длиной 5 м лежит горизонтально на двух опорах, опираясь на них своими концами. На расстоянии 2 м от одного из концов на стержне закреплён груз массой 15 кг. Определите, с какими силами стержень действует на опоры.

Анализ условия. В задаче описан стержень на двух опорах, к которому подвешен груз. Мы не можем пренебречь силой тяжести, действующей на сам стержень — нам задана его масса. Сразу договоримся, что по третьему закону Ньютона стержень действует на опору с такой же силой, что и опора на стержень, поэтому задачу сведём к поиску сил N_1 и N_2 (рис. 1).

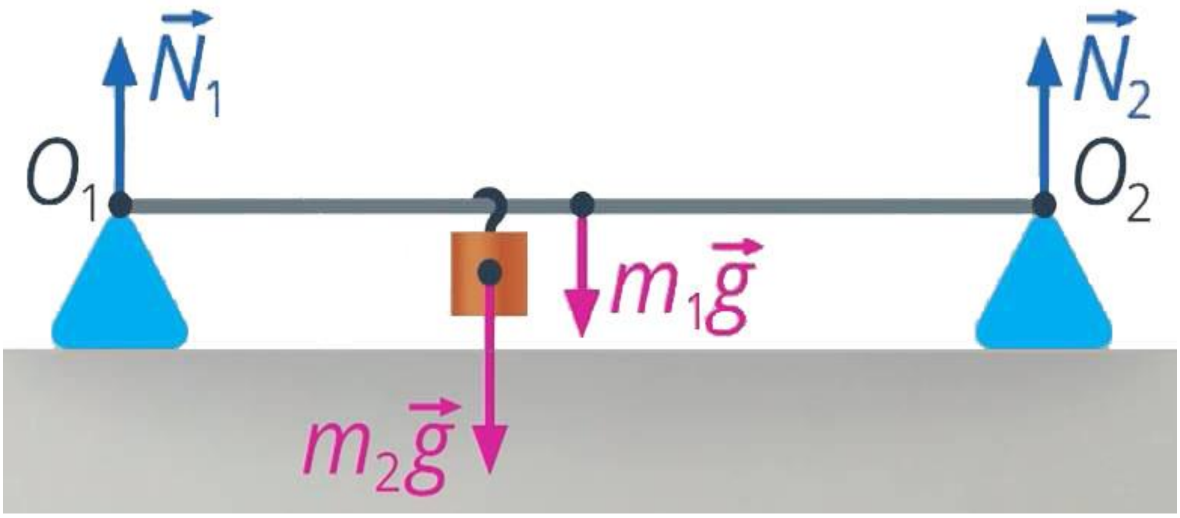


Рис. 1. Стержень на двух опорах. Задача 6

Есть набор сил, приложенных к разным точкам, значит, будем использовать модель твёрдого тела и запишем условие его равновесия. Относительно какой точки будем записывать моменты сил? Так как у нас неизвестны N_1 и N_2, удобно брать точки O_1 и O_2 в точках опор, чтобы было меньше неизвестных в уравнениях, плечи силы N_1, а во втором случае – N_2 будут равны нулю. Давайте запишем два уравнения, взяв обе эти точки, так как нам всё равно нужна система из двух уравнений для поиска двух неизвестных. Положительным направлением вращения стержня давайте считать вращение по часовой стрелке.

Запишем условие равновесия дважды, как договорились. Относительно точки O_1 момент силы N_1 равен нулю, так как плечо силы равно нулю (рис. 2).

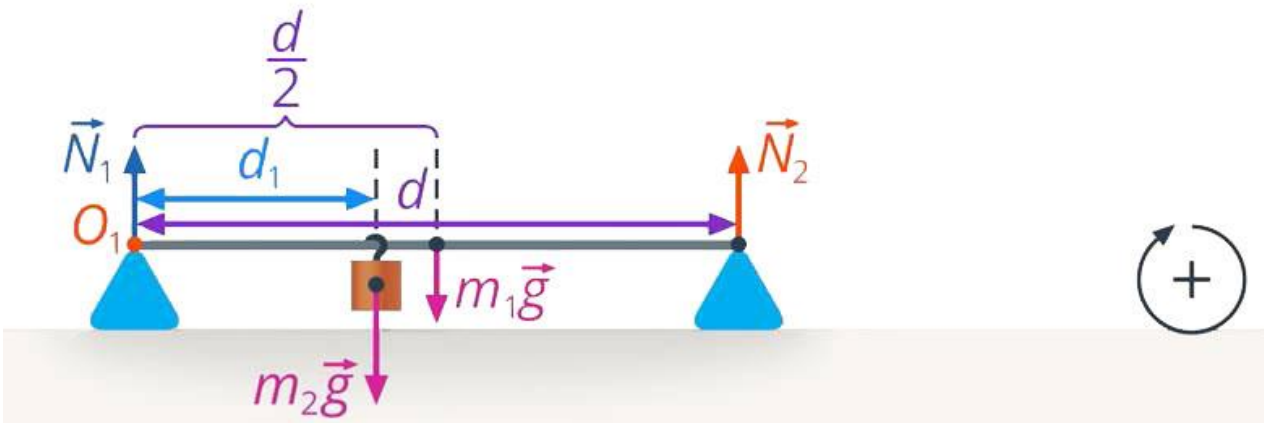


Рис. 2. Плечи сил относительно точки O_1

Момент силы тяжести груза $m_2\vec{g}$ равен $m_2 g d_1$ (d_1 обозначили расстояние 2 м, заданное в условии), момент силы тяжести стержня $m_1\vec{g}$ равен $m_1 g \frac{d}{2}$, так как центр тяжести однородного стержня находится посередине стержня. Момент силы $\vec{N}_2$ равен $-N_2 d$. Согласно условию равновесия, сумма моментов сил равна нулю:

$$m_2 g d_1 + m_1 g \frac{d}{2} - N_2 d = 0.$$

Относительно точки O_2 момент силы N_2 равен нулю. Момент силы тяжести груза равен $-m_2 g(d - d_1)$, плечо этой силы показано на рис. 18, направление вращения — против выбранного положительного направления. Момент силы тяжести стержня равен $-m_1 g \frac{d}{2}$ (помним о расположении центра тяжести и направлении вращения). Момент силы $\vec{N}_1$ равен $N_1 d$.

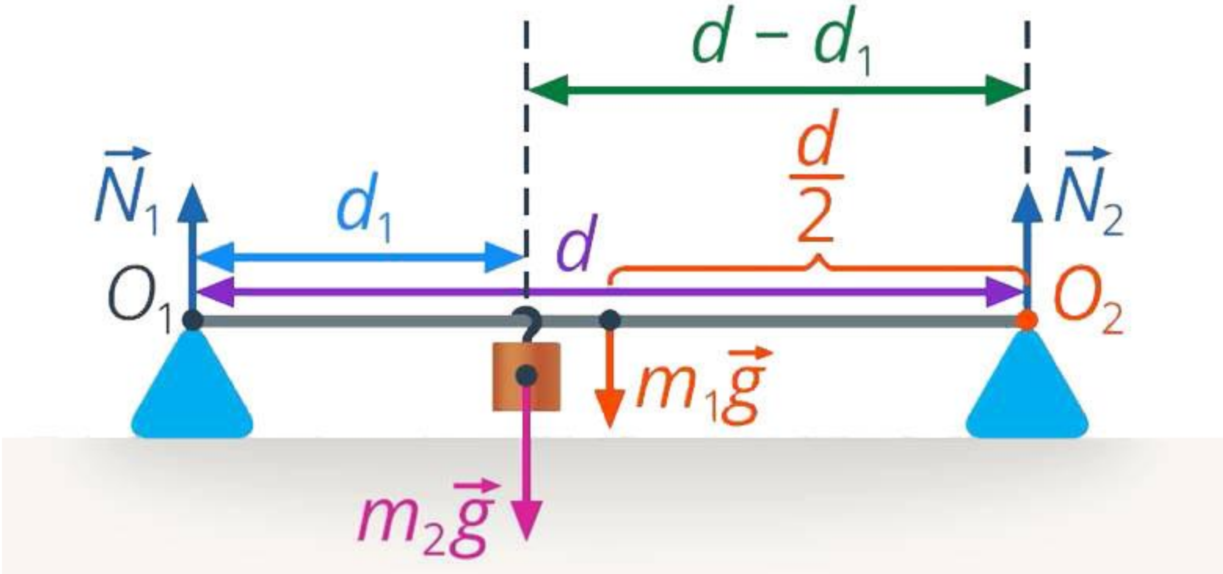


Рис. 3. Плечи сил относительно точки O_2

Запишем условие равновесия относительно точки O_2:

$$-m_2 g(d - d_1) - m_1 g \frac{d}{2} + N_1 d = 0.$$

Получили два уравнения, и математическая часть решения достаточно проста: из первого уравнения можно сразу выразить N_2, а из второго — N_1. Проделаем это.

$$N_2 d = m_2 g d_1 + m_1 g \frac{d}{2},$$

$$N_2 = \frac{g}{2}\left(2m_2 \frac{d_1}{d} + m_1\right).$$

Все величины заданы в СИ, g примем равным $10\ \text{м/с}^2$, вычислим:

$$N_2 = \frac{10}{2} \cdot \left(2 \cdot 15 \cdot \frac{2}{5} + 10\right) = 110\ (\text{Н}).$$

Из второго уравнения:

$$N_1 d = m_2 g(d - d_1) + m_1 g \frac{d}{2},$$

$$N_1 = \frac{g}{2} \cdot \left(2m_2\left(1 - \frac{d_1}{d}\right) + m_1\right) = \frac{g}{2} \cdot \left(2m_2 + m_1 - 2m_2 \frac{d_1}{d}\right).$$

Аналогично вычислим:

$$N_1 = \frac{10}{2} \cdot \left(2 \cdot 15 + 10 - 2 \cdot 15 \cdot \frac{2}{5}\right) = 140\ (\text{Н}).$$

Получили ответ: 110 Н и 140 Н, так распределилась нагрузка между опорами. Можем проверить правильность ответа, применив условие равновесия стержня, как материальной точки: векторная сумма сил должна быть равна нулю. Запишем сразу в проекции на ось координат, направленную вверх:

$$N_1 + N_2 - m_1 g - m_2 g = 0,$$

$$140 + 110 - 10 \cdot 10 - 15 \cdot 10 = 0,$$

$$250 - 250 = 0.$$

Как видим, всё сходится. Кстати, можно было это уравнение записать вместо одного из двух уравнений в решении задачи. В этой задаче мы это не использовали, но в других — можно иметь в виду.

Задача 7.

К стене приставлена лестница длиной L и массой m. Коэффициенты трения лестницы со стеной и полом равны соответственно μ_1 и μ_2. Под каким минимальным углом α к полу можно поставить эту лестницу, чтобы она не скользила?

Анализ условия. В задаче описана лестница, для которой нужно записать условие, при котором она не скользит, то есть находится в равновесии. Будем записывать условия этого равновесия. Перечислим силы, которые действуют на лестницу (рис. 4). Это сила тяжести $m\vec{g}$, приложенная к центру тяжести (если лестницу считать однородной, то он находится посередине лестницы). В точках опоры действуют силы реакции опоры $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$, изобразим их, и силы трения $\vec{F}_{\text{тр.}1}$ и $\vec{F}_{\text{тр.}2}$, направленные так, чтобы препятствовать соскальзыванию лестницы.

Остаётся выбрать точки, относительно которых определяются моменты сил (как мы увидели в предыдущей задаче, удобно выбирать точки опоры O_1 и O_2), и записать условие равновесия тела. Положительным направлением вращения стержня давайте считать направление по ходу часовой стрелки. Если уравнений с моментами сил окажется недостаточно, можем применить второй закон Ньютона.

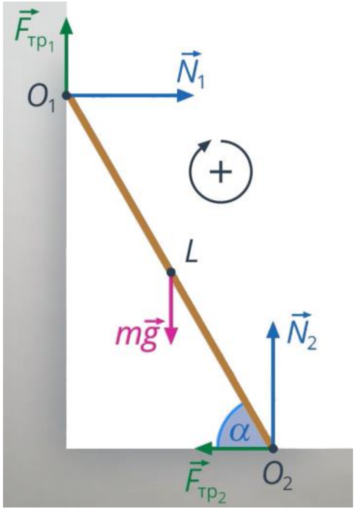


Рис. 4. Лестница у стены. Задача 7

Физическая часть решения. Запишем моменты сил относительно точки O_1. Плечи сил $\vec{N}_1$ и $\vec{F}_{\text{тр.}1}$ равны нулю, поэтому моменты этих сил относительно данной точки равны нулю. Плечо силы $m\vec{g}$ покажем на рисунке. Из прямоугольного треугольника (рис. 5) с гипотенузой $\frac{L}{2}$ и углом α плечо силы равно $\frac{L}{2}\cos\alpha$.

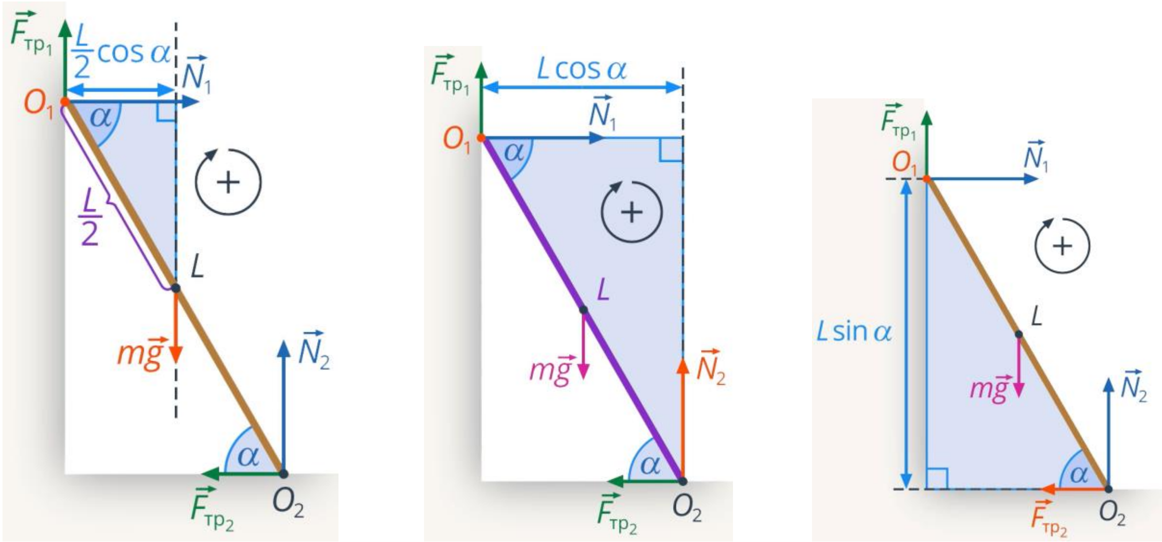


Рис. 5. Плечи сил относительно точки O_1

Момент силы тяжести равен $mg\frac{L}{2}\cdot\cos\alpha$. Плечо силы $\vec{N}_2$ — это сторона большого треугольника с гипотенузой L, то есть $L\cdot cos\ \alpha$. Момент силы N_2 равен $-N_2L\cdot cos\ \alpha$ (направление вращения против хода часовой стрелки). Плечо силы трения $\vec{F}_{тр.2}$ равно стороне большого треугольника, то есть $L\cdot sin\ \alpha$. Момент силы $\vec{F}_{тр.2}$ запишем, выразив силу трения сразу как μ_2N_2: $\mu_2N_2L\sin\alpha$. Запишем условие равновесия:

$$mg\frac{L}{2}cos\ \alpha - N_2Lcos\ \alpha + \mu_2N_2Lsin\ \alpha = 0.$$

Теперь проделаем то же самое относительно точки O_2 (рис. 6).

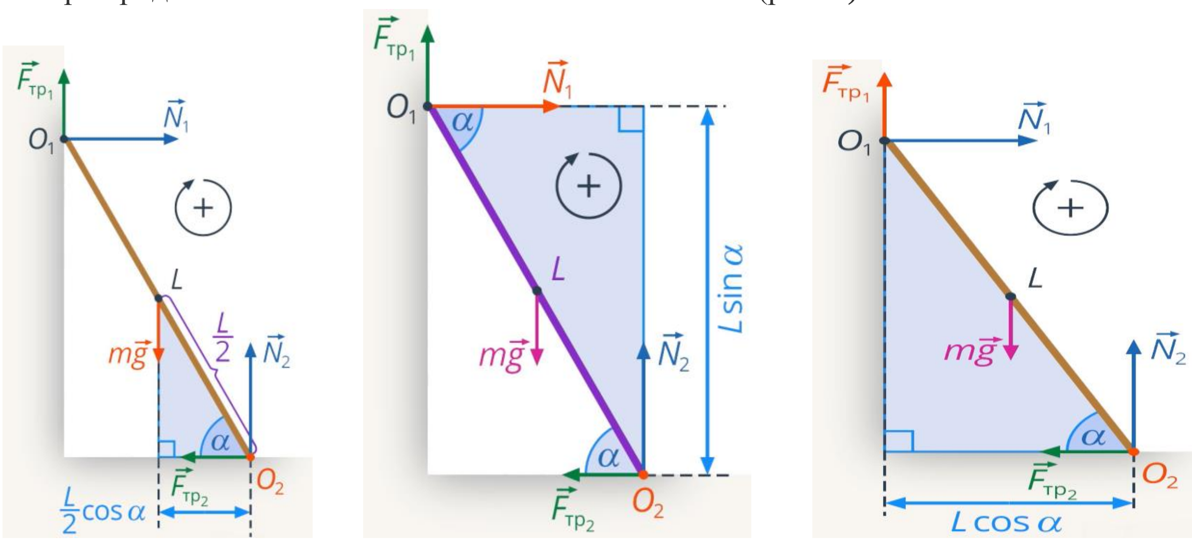


Рис. 6. Плечи сил относительно точки O_2

Плечи сил $\vec{N}_2$ и $\vec{F}_{тр.2}$ равны нулю, поэтому моменты этих сил равны нулю. Плечо силы $m\vec{g}$ покажем на рисунке 21. Из прямоугольного треугольника с гипотенузой $\frac{L}{2}$ и углом α плечо силы равно $\frac{L}{2}\cos\alpha$. Момент силы равен $-mg\frac{L}{2}\cos\alpha$ (направление вращения против хода часовой стрелки). Плечо силы $\vec{N}_1$ — это сторона большого треугольника с гипотенузой L, то есть $L\sin\alpha$. Момент силы равен $N_1 L\sin\alpha$. Плечо силы трения $\vec{F}_{\text{тр.}1}$ — это $L\cos\alpha$. Момент силы запишем сразу как $\mu_1 N_1 L\cos\alpha$. Тогда условие равновесия:

$$-mg\frac{L}{2}\cos\alpha + N_1 L\sin\alpha + \mu_1 N_1 L\cos\alpha = 0.$$

Получили систему из двух уравнений с тремя неизвестными: N_1, N_2 и α. Поэтому нам нужно ещё одно уравнение. Запишем условие равновесия, применив к лестнице модель материальной точки:

$$\vec{F}_{\text{тр}1} + \vec{N}_1 + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}2} + \vec{N}_2 = 0.$$

В проекции на горизонтальную ось не нулевыми останутся только две силы, поэтому запишем это уравнение в проекциях, направив ось *x* вправо:

$$N_1 - \mu_2 N_2 = 0.$$

Теперь у нас есть система уравнений, которую остаётся решить и найти угол α. Математическую часть решения проделаем в ответвлении и получим ответ:

$$\alpha = \frac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_2}.$$

Математическая часть решения задачи 7

Получили систему уравнений:

$$\begin{cases} \{mg\frac{L}{2}\cos\alpha - N_2 L\cos\alpha + \mu_2 N_2 L\sin\alpha = 0, \\ -mg\frac{L}{2}\cos\alpha + N_1 L\sin\alpha + \mu_1 N_1 L\cos\alpha = 0, \\ N_1 - \mu_2 N_2 = 0. \end{cases}$$

Выразим из третьего уравнения $N_1 = \mu_2 N_2$ и перепишем первые два, заодно разделив обе части уравнений на $L\cos\alpha$:

$$\frac{mg}{2} - N_2 + \mu_2 N_2 tg\alpha = 0,$$

$$-\frac{mg}{2} + \mu_2 N_2 tg\alpha + \mu_1\mu_2 N_2 = 0.$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$\frac{mg}{2} + \frac{mg}{2} - N_2 + \cancel{\mu_2 N_2 tg\alpha} - \cancel{\mu_2 N_2 tg\alpha} - \mu_1\mu_2 N_2 = 0,$$

$$mg - N_2 - \mu_1\mu_2 N_2 = 0,$$

$$N_2(1 + \mu_1\mu_2) = mg,$$

$$N_2 = \frac{mg}{1 + \mu_1\mu_2}.$$

Теперь подставим полученное N_2 в преобразованное первое уравнение:

$$\frac{mg}{2} - \frac{mg}{1 + \mu_1\mu_2} + \mu_2\frac{mg}{1 + \mu_1\mu_2}tg\alpha = 0.$$

И выразим тангенс угла, разделив обе части уравнения на mg:

$$\frac{\mu_2}{1 + \mu_1\mu_2}tg\alpha = \frac{1}{1 + \mu_1\mu_2} - \frac{1}{2},$$

$$tg\alpha = \frac{(1 + \mu_1\mu_2)}{(1 + \mu_1\mu_2)\mu_2} - \frac{(1 + \mu_1\mu_2)}{2\mu_2},$$

$$tg\alpha = \frac{1}{\mu_2} - \frac{1 + \mu_1\mu_2}{2\mu_2} = \frac{2 - 1 - \mu_1\mu_2}{2\mu_2} = \frac{1 - \mu_1\mu_2}{2\mu_2}.$$

Тогда угол α равен:

$$\alpha = arctg\frac{1 - \mu_1\mu_2}{2\mu_2}.$$

Задача решена.

Мы рассмотрели модель, которая позволяет решить определённый класс задач. Можно сформулировать сколько угодно других задач и создать для них свои модели.

Например, мы рассмотрели задачу статики, когда тело неподвижно или вращается равномерно с постоянной угловой скоростью, и это позволило применить закон сохранения энергии. А ведь угловая скорость может изменяться, можно ввести угловое ускорение и рассмотреть, как вращение тела «разгоняется», ввести характеристику инерции такого разгона. Или можно рассмотреть, как тело вращается и одновременно с этим движется в пространстве. Можно рассмотреть движение жидкостей и газов: там тоже должен работать способ разбиения на части и решение задач для отдельных таких частей, только эти части взаимодействуют между собой по-другому.

Важно понять общий принцип: мы ищем, как решить задачу, применяя и совершенствуя, а также комбинируя модели, с которыми уже умеем работать. Решение может оказаться громоздким, но полученный ответ можно будет применять как готовую модель со своими границами применимости для решения похожих задач.